<u>Exercice 1</u> : Calcul sur les dérivées nième

Soit f(x) = $x^3\ln(x)$. On se propose de calculer la dérivée nième de la fonction $f(x)$.

f(x) est une fonction composée et donc l'utilisation de la formule de LEIBNIZ nous sera utile.

1- **Dérivons la fonction $f(x)$ pour déterminer par récurrence sa dérivée nième**

Supposons que fonction se présente sous forme générale comme suit ; $f(x) = x^k\ln(x)$, avec k ≥ 0.

Nous aurons des dérivées suivantes :

$f(x) = x^k\ln(x)$

$f'(x) = kx^{(k-1)}\ln(x) + x^{(k-1)}$

$f''(x) = k(k-1)x^{(k-2)}\ln(x) + \mathrm{k}\,x^{(k-2)} + (\mathrm{k}-1)\,x^{(k-2)}$

$f'''(x) = k(k-1)(k-2)x^{(k-3)}\ln(x) + k(k-1)\,\mathrm{k}\,x^{(k-3)} + \mathrm{k}(\mathrm{k}-2)\,x^{(k-3)} + \mathrm{k}(\mathrm{k}-2)\,x^{(k-3)}$

$$f'''(x) = \underbrace{k(k-1)(k-2)(k-3)x^{(k-4)}\ln(x)} + \underbrace{k(k-1)(k-2)\,\mathrm{k}\,x^{(k-4)} + \mathrm{k}(\mathrm{k}-2)(k-3)\,x^{(k-3)} + \mathrm{k}(\mathrm{k}-2)\,x^{(k-3)}}$$

Nous constatons que cette partie par récurrence nous donne : $[\prod_{i=0}^{n-1}(k-i)]x^{(k-n)}\ln(x)$

D'où pour k=3 , on :

$[\prod_{i=0}^{n-1}(3-i)]x^{(3-n)}\ln(x)$ (1)

Nous déterminerons cette somme que l'on notera $p^{(n)}(x)$ en se servant de la formule de LEIBNIZ

2- **Détermination de la somme précédente par l'utilisation de la formule de LEIBNIZ**

f(x) = $x^3\ln(x)$

Posons ; $h(x) = x^3$ et g(x) = $\ln(x)$ et $p(x) = f(x)$. Donc p(x) = $h(x)\,g(x)$

a- **Dérivons** : $h(x)$ et $g(x)$

$h(x) = h^{(0)}(x) = x^3$

$h'(x) = h^{(1)}(x) = 3x^2$

$h''(x) = h^{(2)}(x) = x$

$h'''(x) = h^{(3)}(x) = 6$, ∀ k ≥ 4 $h^{(k)}(x) = 0$

g(x) = $\ln(x)$

$g'(x) = \frac{1}{x}$

$g''(x) = -\frac{1}{x^2}$

$g'''(x) = -\frac{1}{x^2}$

$g''''(x) = -\frac{1}{x^2}$

On montre par récurrence que ∀ k ≥ 0 , $g^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{(n-1)}(k-1)!}{x^k}$ (2)

b- **Appliquons alors la formule de LEIBNIZ**

$$p^{(n)}(x)= \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\ h^{(i)}(x).\,g^{(n-i)}(x)$$, formule de LEIBNIZ

Avec $\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$

⇨ $p^{(n)}(x)= \binom{n}{0}h^{(0)}.\,g^{(n)}+\binom{n}{1}h^{(1)}.\,g^{(n-1)}+\binom{n}{2}h^{(2)}.\,g^{(n-2)}+\binom{n}{3}h^{(3)}.\,g^{(n-3)}$

car $\forall$ k $\geq$ 4 $h^{(k)}(x)$ = 0 c'est-à-dire

D'après (2), $g^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{(n-1)}(k-1)!}{x^k}$

k= n $\quad g^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{(n-1)}(n-1)!}{x^n}$

k= n-1 $\quad g^{(n-1)}(x) = \frac{(-1)^{(n-2)}(n-2)\,!}{x^{n-1}}$

k= n-2 $\quad g^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{(n-3)}(n-3)\,!}{x^{n-2}}$

k= n-3 $\quad g^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{(n-4)}(n-4)!}{x^{n-3}}$

D'autre part:

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!(n-0)!} = \frac{n!}{n!} = 1$$

$$\binom{n}{1} = \frac{n!}{1!(n-1)!} = \frac{n(n-1)!}{(n-1)!} = n$$

$$\binom{n}{2} = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)(n-2)!}{2(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$\binom{n}{3} = \frac{n!}{3!(n-3)!} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)!}{6(n-3)!} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$$

Ainsi notre formule devient :

$$p^{(n)}(x)= x^3\,\frac{(-1)^{(n-1)}(n-1)!}{x^n} + 3nx^2\,\frac{(-1)^{(n-1)}(n-1)!}{x^n} + x\,\frac{n(n-1)}{2}\,\frac{(-1)^{(n-3)}(n-3)\,!}{x^{n-2}} + 6\,\frac{n(n-1)(n-2)}{6}\,\frac{(-1)^{(n-4)}(n-4)!}{x^{n-3}}$$

Apres simplification

$$p^{(n)}(x)= \mathrm{n}(-1)^{(n-1)}x^{(3-n)}\left[\frac{(n-1)!}{n} - (n-2)! + (n-1)(n-3)! - (n-1)(n-2)(n-4)!\right]$$

Soit $f^{(n)}(x)=(1) + p^{(n)}(x)$

D'où

$$f^{(n)}(x) = \left[\prod_{i=0}^{n-1}(3-i)\right]x^{(3-n)}\ln(x) + \mathrm{n}(-1)^{(n-1)}x^{(3-n)}\left[\frac{(n-1)!}{n} - (n-2)! + (n-1)(n-3)! - (n-1)(n-2)(n-4)!\right]$$

Exercice 2: Calcul sur les fonctions équivalentes

Rappel de quelques formules trigonométrie circulaire et hyperbolique

$cos^2(x) + sin^2(x) = 1$

$cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$ $\qquad$ $cos^2(kx) = \frac{1+\cos(2kx)}{2}$

$sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$ $\qquad$ $sin^2(kx) = \frac{1-\cos(2kx)}{2}$

$\cos(\frac{p+q}{2}).\cos(\frac{p-q}{2}) = \frac{1}{2}[\cos(p) + \cos(q)]$

$\sin(\frac{p+q}{2}).\sin(\frac{p-q}{2}) = -\frac{1}{2}[\cos(p) - \cos(q)]$

$\cos(\frac{p+q}{2}).\mathrm{Cos}(\frac{p-q}{2}) = \frac{1}{2}[\cos(p) + \cos(q)]$

$\cos(\frac{p+q}{2}).\cos(\frac{p-q}{2}) = \frac{1}{2}[\cos(p) + \cos(q)]$

$ch(2x) = 2ch^2(x) - 1$

$ch(2x) = \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2}$

$sh(2x) = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2}$

Calculons les limites suivantes en utilisant les fonctions équivalentes

a- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1+2cos^3(x) - 3\sqrt{\cos(2x)}}{sin^4(x)}$

- **Détermination des équivalences**

On utilisera ici le développement limité d'ordre 4

Pour $cos^3(x)$

$cos^3(x) = \cos(x).cos^2(x)$ $\qquad$ or $\quad cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$

$= \cos(x).\left(\frac{1+\cos(2x)}{2}\right)$

$= \frac{1}{2}[\cos(x) + \cos(x)\cos(2x)]$,

$\cos(x)\cos(2x) = \frac{1}{2}[\cos(3x) + \cos(x)]$, formule (2) ici $\frac{p+q}{2} = x \quad et \quad \frac{p+q}{2} = 2x$

$cos^3(x) = \frac{1}{4}[2\cos(x) + \cos(3x) + \cos(x)] = \frac{1}{4}[3\cos(x) + \cos(3x)]$

Soit $\quad cos^3(x) = \frac{3}{4}\cos(x) + \frac{1}{4}\cos(3x)$

Or $\cos(kx) \approx 1 - \frac{(kx)^2}{2} + \frac{(kx)^4}{4!} + \varepsilon(x^4)$ $\quad$ ($\cos(kx) \approx$: se lit cosinus kx est équivalent à)

Ainsi $cos^3(x) = \frac{3}{4}\cos(x) + \frac{1}{4}\cos(3x) \approx \frac{3}{4}(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}) + \frac{1}{4}\left[1 - \frac{9x^2}{2} + \frac{81x^4}{24}\right] + \varepsilon(x^4)$

<u>N.B</u> : <u>**Faites attention à l'argument**</u>

⇨ $cos^3(x) \approx \frac{3}{4} - \frac{3x^2}{8} + \frac{x^4}{32} + \frac{1}{4} - \frac{9x^2}{8} + \frac{27x^4}{32} + \varepsilon(x^4)$

$cos^3(x) \approx 1 - \frac{3x^2}{2} + \frac{7x^4}{8} + \varepsilon(x^4)$

Soit $cos^3(x) \approx 1 - \frac{3x^2}{2} + \frac{7x^4}{8} + \varepsilon(x^4)$

Pour $\sqrt{\cos(2x)}$

On sait que $\cos(kx) \approx 1 - \frac{(kx)^2}{2} + \frac{(kx)^4}{4!} + \varepsilon(x^4)$

⇨ $\cos(2x) \approx 1 - \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^4}{4!} + \varepsilon(x^4)$ pour K= 2

⇨ $\cos(2x) \approx 1 - 2x^2 + \frac{2x^4}{3} + \varepsilon(x^4)$

$\sqrt{\cos(2x)} = \sqrt{1 - 2x^2 + \frac{2x^4}{3}} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{12} + \varepsilon(x^4)$

Soit $\sqrt{\cos(2x)} \approx 1 - x^2 + \frac{x^4}{12} + \varepsilon(x^4)$

Pour $sin^4(x)$

$sin^4(x) = sin^2(x).sin^2(x)$ $\quad sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$

⇨ $sin^4(x) = \left[\frac{1-\cos(2x)}{2}\right].\left[\frac{1-\cos(2x)}{2}\right]$

$= [\frac{1-\cos(2x)}{2}]^2 = \frac{1}{4}[1 - \cos(2x)]^2$

$= \frac{1}{4}[1 - 2\cos(2x) + cos^2(2x)]$ or $cos^2(2x) = \frac{1+\cos(4x)}{2}$

⇨ $sin^4(x) = \frac{1}{4}[1 - 2\cos(2x) + \frac{1+\cos(4x)}{2}]$

$= \frac{1}{4}[1 - 2\cos(2x) + \frac{1}{2} + \frac{\cos(4x)}{2}]$

$= \frac{1}{4}[\frac{3}{2} - 2\cos(2x) + \frac{\cos(4x)}{2}]$

$= \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{\cos(4x)}{8}$

⇨ $sin^4(x) = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{\cos(4x)}{8}$

Or $\cos(kx) \approx 1 - \frac{(kx)^2}{2} + \frac{(kx)^4}{4!} + \varepsilon(x^4)$ (développement limité d'ordre 4)

⇨ Pour k =2, on a :

$$\cos(2x) \approx 1 - \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^4}{4!} \approx 1 - 2x^2 + \frac{2x^4}{3} + \varepsilon(x^4)$$

Pour k =2, on a :

$$\cos(4x) \approx 1 - \frac{(4x)^2}{2} + \frac{(4x)^4}{4!} \approx 1 - 8x^2 + \frac{32x^4}{3} + \varepsilon(x^4)$$

Ainsi $sin^4(x) \approx \frac{3}{8} - \frac{1}{2}(1 - 2x^2 + \frac{2x^4}{3}) + \frac{1 - 8x^2 + \frac{32x^4}{3}}{8} + \varepsilon(x^4)$

Soit $sin^4(x) \approx \frac{3}{8} - \frac{1}{2} + x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{1}{8} - x^2 + \frac{4x^4}{3} + \varepsilon(x^4)$

$$sin^4(x) \approx x^4 + \varepsilon(x^4)$$

- **Calcul de la limite**

$$\lim_{x\to 0} \frac{1+2cos^3(x) - 3\sqrt{\cos(2x)}}{sin^4(x)} \approx \lim_{x\to 0} \frac{1+2(1-\frac{3x^2}{2}+\frac{7x^4}{8}) - 3(1 - x^2 + \frac{1}{12}x^4)}{x^4}$$

$$\approx \lim_{x\to 0} \frac{1+2 - 3x^2 + \frac{7x^4}{4} - 3 + 3x^2 - \frac{1}{4}x^4}{x^4}$$

$$\approx \lim_{x\to 0} \frac{\frac{6x^4}{4}}{x^4} \approx \lim_{x\to 0} \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

D'où $\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{1+2cos^3(x) - 3\sqrt{\cos(2x)}}{sin^4(x)} = \frac{3}{2}}$

b- $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} [x \tan x - \frac{\pi}{2\cos(x)}]$

- **Détermination des équivalences**

$\tan x \approx x + \varepsilon(x)$

$\cos(x) \approx 1 + \varepsilon(x)$

- **Calcul de la limite**

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} [x \tan x - \frac{\pi}{2\cos(x)}] \approx \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} [x\,(x) - \frac{\pi}{2(1)}] \approx \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} [x^2 - \frac{\pi}{2}]$$

$$= \frac{\pi^2}{16} - \frac{\pi}{2}$$

D'où $\boxed{\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} [x \tan x - \frac{\pi}{2\cos(x)}] = \frac{\pi^2}{16} - \frac{\pi}{2} = \pi(\frac{\pi-8}{16})}$

c- Simplifions l'expression suivante

$j = \frac{2ch^2(x) - sh(2x)}{x - \ln[ch(x)] - \ln(2)}$

$ch(2x) = 2ch^2(x) - 1$

$\Rightarrow \; ch^2(x) = \frac{1}{2}(1 + ch(2x)) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}ch(2x) \;\; (1)$

$ch(2x) = \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2} \qquad et \quad sh(2x) = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2}$

(1) Devient : $ch^2(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}ch(2x) \; = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(\frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2})$

J devient : $j = \frac{2ch^2(x) - sh(2x)}{x - \ln[ch(x)] - \ln(2)} = \frac{2\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2}\right)\right] - (\frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2})}{x - \ln\left[\frac{e^{x} + e^{-x}}{2}\right] - \ln(2)}$

$$= \frac{1 + \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2} - \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2}}{x - \ln 2 + \ln(2) - \ln(e^{x} + e^{-x})}$$

$$= \frac{1 + \frac{e^{2x}}{2} + \frac{e^{-2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{2} + \frac{e^{-2x}}{2}}{x - ln(e^{x} + e^{-x})}$$

$$= \frac{1 + \frac{e^{-2x}}{2} + \frac{e^{-2x}}{2}}{x - ln(e^{x} + e^{-x})} = \frac{1 + e^{-2x}}{x - ln(e^{x} + e^{-x})}$$

$$= \frac{1 + e^{-2x}}{x - ln[e^{x}(1 + e^{-2x})]} = \frac{1 + e^{-2x}}{x - lne^{x} - ln(1 + e^{-2x})}$$

$$= \frac{1 + fe^{-2x}}{x - x - ln(1 + e^{-2x})} = \frac{1 + e^{-2x}}{-ln(1 + e^{2x})}$$

D'où $\boxed{j = \frac{2ch^2(x) - sh(2x)}{x - \ln[ch(x)] - \ln(2)} = -\left[\frac{1 + e^{-2x}}{ln(1 + e^{-2x})}\right]}$

Exercice 3 :

On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction f par $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$

1. Montrons que f est prolongeable par continuité en 0 en définissant son prolongement g

a- Montrons que f est prolongeable par continuité en 0

Définition :

Soit I un intervalle, x_0 un point de I et $f : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ une fonction.

- On dit que f est prolongeable par continuité en x_0 si f admet une limite finie en x_0. Notons alors $l = \lim_{x \to x_0} f$ cette limite.
- On définit alors la fonction f : $I \to \mathbb{R}$ en posant pour tout $x \in I$

$$f(x) = \begin{cases} f(x) & \text{Si} \quad x \neq x_0 \\ l & \text{Si} \quad x = x_0 \end{cases}$$

- **Domaine de définition de f**

f est définit $\forall\, x \in \mathbb{R}$. Soit D$\boldsymbol{f} = \mathbb{R}$

Calculons la limite de f

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to 0} e^{-\frac{1}{x^2}} = e^{-\frac{1}{0}} = e^{-\infty} = 0$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$$

Conclusion : f admet une limite finie en x_0=0 alors f est prolongeable par continuité en $x_0 = 0$

b- définissons son prolongement g

Comme f est prolongeable par continuité**,** on définit alors la fonction g : D$\boldsymbol{f} \to \mathbb{R}$ en posant pour tout $x \in$ D$\boldsymbol{f}$

$$g(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{Si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{Si} \quad x = 0 \end{cases}$$

2. Montrons que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et étudions ses variations
   a- Montrons que g est dérivable sur $\mathbb{R}$

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ s'il existe un réel fini $q \setminus \forall\; x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = q$

Ainsi, **pour** $\boldsymbol{x = 0}$, $g(x) = 0$ et $g(0) = 0$

$$g'(x) = \lim_{x \to 0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{0}{x} = \lim_{x \to x_0} \frac{0.x}{x} = \frac{0}{1} = 0$$

Donc $g'(x) = q = 0$ réel fini $\to g(x)$ est dérivable en 0

Pour $\boldsymbol{x \neq 0}$, $g(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ cette fonction est dérivable en tout point de $\mathbb{R}$ diffèrent de 0.

Conclusion : Comme $g(x)$ est dérivable en $\boldsymbol{x = 0}$ et en tout point de $\mathbb{R}$ diffèrent de 0 alors g est dérivable en tout de $\mathbb{R}$. D'où g est dérivable sur $\mathbb{R}$.

b- Etudions les variations de g

1- Limites aux bornes de D$\boldsymbol{g}$

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0 \;\to\; \lim_{x \to -\infty} g(x) = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0 \;\to\; \lim_{x \to -\infty} g(x) = 0$$

2- Continuité

La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$. D'où elle est aussi continue sur $\mathbb{R}$.

3- <u>Dérivée et signe</u>

$$g(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{Si } \ x \neq 0 \\ 0 & \text{Si } \ x = 0 \end{cases}$$

$$g'(x) = \begin{cases} \dfrac{2e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^3} & \text{Si } \ x \neq 0 \\ 0 & \text{Si } \ x = 0 \end{cases}$$

Signe : $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) > 0$ donc la fonction g est croissante.

<u>Déduisons en justifiant que $g \in$ est C^1 $(\mathbb{R})$</u>

g est dite classe C^1 $(\mathbb{R})$ si :

- g est continue sur $\mathbb{R}$
- g est dérivable sur $\mathbb{R}$
- et g' est aussi continue.

Nous avons montré précédemment que g est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. Vérifions ainsi la continuité de g' sur $\mathbb{R}$.

$g'(x)= 0 \quad \rightarrow \quad \lim\limits_{x \to 0} g'(x)= 0$, $g'(x)$ est continue en 0

$g'(x) = \dfrac{2e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^3} \rightarrow \ \forall\, x \neq 0$, $\lim\limits_{x \to x_0 \neq 0} g'(x) = $ l, réel fini. Donc $g'(x)$ est continue en $x_0 \neq 0$

D'où $g'(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

<u>Conclusion</u> : comme

- g est continue sur $\mathbb{R}$
- g est dérivable sur $\mathbb{R}$
- et g' est aussi continue, alors $g \in$ est C^1 $(\mathbb{R})$

<u>Exercice 4</u> :

1- Etablissons et représentons l'ensemble de définition de chaque fonction suivante :

i) $g(x,y) = \ln(x+y) - x\sqrt{2+y-x}$

Etablissons l'ensemble de définition

$g(x,y)$ est définie si et seulement si : $\begin{cases} x + y > 0 \\ 2 + y - x \geq 0 \end{cases}$

Soit D$g = \{(\,x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus x > -y$ et $y \geq \ x - 2\,\}$

ii) $f(x,y) = \ln(1-x+y) + \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}$

$f(x,y)$ est définie si et seulement si : $\begin{cases} 1-x+y > 0 \\ 1-x^2 \geq 0 \\ 1-y^2 \geq 0 \end{cases}$

Soit $\mathrm{D}f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus 1-x+y > 0 \text{ et } 1-x^2 \geq 0 \text{ et } 1-y^2 \geq 0\}$

2- On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{Si } (x,y) \neq (0;0) \\ f(0;0) = 0 \end{cases}$$

a- **Montrons que f est continue sur $\mathbb{R}^2$**

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0;0)\}$ comme fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas. On étudie maintenant la continuité en $(0;0)$.

Pour $(x,y) \neq (0;0)$,

$$|f(x,y) - f(0;0)| = \frac{|x^2y|}{x^2+y^2} \leq \frac{|x^2y|}{x^2} = |y|.$$

Donc $\lim\limits_{(x,y) \to (0;0)} f(x,y) = 0 = f(0;0)$ et donc f est continue en $(0;0)$

D'où f est continue sur $\mathbb{R}^2$

b- Montrons que f admet deux dérivées partielles d'ordre 1 continue sur $\mathbb{R}^2$

- Calcul des dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2xy(x^2+y^2) - x^2y(2x)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2xy(x^2+y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2xy(y^2)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x^2(x^2+y^2) - x^2y(2y)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2(x^2+y^2-2y^2)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

Soit

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x^2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

- Existence de : $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$

On a : $\frac{f(x,0)-f(0;0)}{x} = 0 \rightarrow \frac{f(x,0)-f(0;0)}{x} =$ admet une limite finie en 0, ce qui implique que $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ exite et $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$ d'une part

D'autre part, $\frac{f(0,Y)-f(0;0)}{y} = 0 \rightarrow \frac{f(0,Y)-f(0;0)}{y}$ = admet une limite finie en 0, ce qui implique que $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ exite et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ =0.

On vient de montrer que f admet deux dérivées partielles d'ordre 1

- <u>Continuité des dérivées partielles en (0 ;0)</u>

$|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)| \leq \frac{2|xy^3|}{x^2+y^2} \leq 2|y| \rightarrow \lim\limits_{(x,y)\rightarrow(0;0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0$ donc $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$

$|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)| \leq \frac{|x^2|}{x^2+y^2} \leq 1 \rightarrow \lim\limits_{(x,y)\rightarrow(0;0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) =1$ donc $\frac{\partial f}{\partial y}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$

<u>Conclusion</u> : comme f admet deux dérivées partielles d'ordre 1 et continue en (0 ; 0) alors f admet deux dérivées partielles d'ordre 1 continue sur $\mathbb{R}^2$

3- Etudions l'existence et les cas échéant des dérivées partielles d'ordre 2 en (0 ; 0)

- Existence de : $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)$

$\frac{1}{x}(\frac{\partial f}{\partial x}(x,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)) = 0 \rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)$ existe soit $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 0$

Avec $\frac{\partial f}{\partial x}(x,0) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$

- Existence de : $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)$

$\frac{1}{y}(\frac{\partial f}{\partial y}(0,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)) = 0 \rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)$ existe soit $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = 0$

Avec $\frac{\partial f}{\partial y}(0,y) = \frac{0(0-y^2)}{(x^2+y^2)^2} = 0$

- Existence de : $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$

$\frac{1}{x}(\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)) = \frac{1}{x} \rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ existe soit $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \frac{1}{x}$

Avec $\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) = \frac{x^2(x^2-0)}{(x^2+0)^2} = 1$

- Existence de : $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$

$\frac{1}{y}(\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)) = 0 \rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ existe soit $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = 0$

Avec $\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = \frac{0y^3}{(0+y^2)^2} = 0$

4- Déterminons les points critiques et précisons la nature des extrema éventuels de la fonction h définie par : $\boldsymbol{h = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2}$

- <u>Détermination des points critiques</u>

La détermination des points critiques se fait par la résolution du système d'équation suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial h}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases}$$

Déterminons les dérivées partielles : $\frac{\partial h}{\partial x}(x,y)$ et $\frac{\partial}{\partial y}(x,y)$

On a :

- $\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) = 6x^2 + y^2 + 10\,x$
- $\frac{\partial h}{\partial y}(x,y) = 2\,xy + 2y$

Notre système devient :

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial h}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 6x^2 + y^2 + 10\,x = 0 & (1) \\ 2\,xy + 2y = 0 & (2) \end{cases}$$

⇨ $\begin{cases} 6x^2 + y^2 + 10\,x = 0 \\ 2y(x+1) = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 6x^2 + y^2 + 10\,x = 0 \\ y = 0 \; ou \; x = -1 \end{cases}$

Pour $= 0$, l'équation (1) devient : $6x^2 + 10\,x = 0$

⇨ $2x(3x+5) = 0$

⇨ $x = 0 \; ou \; x =$ - $\frac{5}{3}$

On alors : $\binom{0}{0}$, $\binom{-\frac{5}{3}}{0}$

Pour $= -1$, l'équation (1) devient : $6 + y^2 - 10 = 0$

⇨ $y^2 - 4 = 0$

⇨ $y = 2$ ou $y = -2$

On alors : $\binom{-1}{2}$, $\binom{-1}{-2}$

<u>Conclusion</u> :

D'après ce qui précède, la fonction admet quatre (4) points critiques : $\binom{0}{0}$, $\binom{-\frac{5}{3}}{0}$ $\binom{-1}{2}$, $\binom{-1}{-2}$

- <u>précisons la nature des extrema éventuels de la fonction h</u>

Pour déterminer la nature des extremums, nous allons utiliser la notation de Monge. Ainsi nous aurions besoin des dérivées partielles d'ordre 2 de h.

On a:

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial x}(x,y) = 6x^2 + y^2 + 10\,x \\ \frac{\partial h}{\partial y}(x,y) = 2\,xy + 2y \end{cases}$$

⇨ $$\begin{cases} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,y) = 12\,x + 10 \\ \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(x,y) = 2\,x + 2 \end{cases}$$

- $\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} = \frac{\partial h}{\partial x}\left(\frac{\partial h}{\partial y}(x,y)\right) = \frac{\partial h}{\partial x}(2\,xy + 2y) = 2y$

Nous avons: s^2 – rt (notation de Monge)

Avec s = $\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} = 2y$, r = $\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,y) = 12\,x + 10$ et t = $\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(x,y) = 2\,x + 2$

- Pour $\binom{0}{0}$, $\begin{cases} s = 0 \\ r = 10 \\ t = 2 \end{cases}$ ainsi s^2 – rt = -20 < 0 et $r = 10 > 0$ donc h admet un minimum local en $\binom{0}{0}$

- Pour $\begin{pmatrix} -\frac{5}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{cases} s = 0 \\ r = -20 \\ t = -\frac{10}{3} \end{cases}$ ainsi s^2 – rt = $-\frac{200}{3}$ < 0 et $r = 10 < 0$ donc h admet un Maximum local en $\begin{pmatrix} -\frac{5}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$

- Pour $\binom{-1}{2}$, $\begin{cases} s = 4 \\ r = -2 \\ t = 0 \end{cases}$ ainsi s^2 – rt = $16 > 0$ donc h n'admet pas un extremum en $\binom{-1}{2}$

- Pour $\binom{-1}{-2}$, $\begin{cases} s = -4 \\ r = 2 \\ t = 0 \end{cases}$ ainsi s^2 – rt = $16 > 0$ donc h n'admet pas un extremum en $\binom{-1}{-2}$